

# **CAMBIO TECNOLÓGICO Y APRENDIZAJE: UN MODELO DE CRECIMIENTO**

**Salvador Rivas Aceves**

## **Resumen**

En el presente trabajo se desarrolla un modelo de crecimiento endógeno en donde el gobierno interviene como promotor de la generación de tecnología a través del ejercicio de su gasto. Se caracteriza el equilibrio macroeconómico que es consistente con el proceso de aprendizaje sobre las preferencias de los agentes y se establece el nivel del gasto de gobierno, dirigido a la generación de nuevas tecnologías, que maximiza el bienestar económico de los agentes cuando están sujetos a dicho proceso de aprendizaje. Uno de los principales resultados de esta investigación es que existe un impacto positivo sobre el crecimiento económico cuando el gobierno interviene como promotor del cambio tecnológico. Asimismo, los impactos en el bienestar económico por cambios en el gasto, los impuestos y los precios son evaluados. Por último, se realiza una calibración del modelo en donde se determina el nivel de gasto de gobierno que genera un cambio en las condiciones tecnológicas.

*Palabras clave:* crecimiento endógeno, aprendizaje, gasto de gobierno, cambio tecnológico.

*Clasificación JEL:* O33, O38, D83, O42.

## **Proyecto**

- 1. Presentación**
- 2. El modelo**
- 3. Gobierno promotor del cambio tecnológico**
- 4. Impacto sobre el bienestar económico**
- 5. Conclusiones**

## 1. Presentación

El avance tecnológico es considerado como uno de los principales determinantes del crecimiento económico, de hecho Pavitt y Soete (1981), Fageberg (1988) y Dosi, *et. al.* (1994) muestran, de manera empírica, que existe una relación muy estrecha entre estas dos variables económicas. En la teoría del crecimiento, es usual suponer que las modificaciones en las condiciones tecnológicas en una economía se deben exclusivamente a los esfuerzos en investigación y desarrollo tecnológico que realizan las empresas. Al respecto, las principales aportaciones en el marco ortodoxo han sido realizadas por Harrod (1939), Arrow (1962), Uzawa (1965), Romer (1986, 1987 y 1990) y Lucas (1988), mientras que Aghion y Howitt (1992 y 1994), Howitt (1999), Landesmann y Goddwin (1994) y Jones (1995) lo han hecho desde la llamada teoría heterodoxa. Gracias a las aportaciones empíricas y teóricas antes mencionadas, se sabe que una economía crece a un mayor ritmo si posee, particularmente, un coeficiente tecnológico alto.

Sin embargo, la participación del gobierno como promotor del cambio tecnológico no ha sido un tema de gran interés para la teoría del crecimiento. No obstante, en los países desarrollados, la participación del sector público en las actividades de investigación y desarrollo tecnológico ha sido un factor de extraordinaria relevancia para alcanzar una mayor tasa de crecimiento económico. Más todavía, la evidencia empírica muestra que los gobiernos de los países desarrollados destinan un porcentaje importante del gasto en investigación y desarrollo como se muestra en el siguiente cuadro:

**Cuadro 1.** Gasto en investigación y desarrollo por fuente de recursos  
(porcentaje financiado por el gobierno)

<b>Año</b>	<b>Dinamarca</b>	<b>Alemania</b>	<b>Francia</b>	<b>Austria</b>	<b>Finlandia</b>	<b>Suecia</b>	<b>USA</b>	<b>Japón</b>
<b>1996</b>	35.7	38.1	41.5	43.2	31.2	26.4	33.2	18.7
<b>1997</b>	36.1	35.9	38.8	41.0	30.9	25.8	31.5	18.2
<b>1998</b>	33.8	34.8	37.3	37.8	30.0	24.9	30.1	19.3
<b>1999</b>	31.2	32.1	36.9	38.9	29.2	24.5	28.4	19.6
<b>2000</b>	32.5	31.4	38.7	38.0	26.2	21.3	25.8	19.6
<b>2001</b>	28.2	31.4	36.9	38.3	25.5	22.4	27.5	18.6
<b>2002</b>	27.6	31.6	38.8	33.6	26.1	23.5	30.3	18.2
<b>2003</b>	27.1	31.2	39.0	34.4	25.7	23.5	30.4	17.7
<b>2004</b>	27.4	30.5	37.0	32.6	26.3	23.5	31.4	17.3
<b>2005</b>	27.6	28.4	38.2	36.5	25.7	24.6	32.5	17.9
<b>2006</b>	28.3	29.5	39.0	36.6	25.1	26.2	31.7	18.3
<b>Promedio</b>	30.5	32.3	38.4	37.4	27.4	24.2	30.3	18.5

Fuente: Eurostat 2008, indicadores GERD (Gross Expenditure in Research and Development)

Observe que, en promedio, en países como Alemania, Francia, Austria y Dinamarca el porcentaje de financiamiento en investigación y desarrollo por parte del gobierno, respecto del total, es superior al 30%. Por lo tanto, un agente económico capaz de generar un cambio en las condiciones tecnológicas no sólo es la empresa sino también el gobierno, lo que le permite incidir directamente sobre la tasa de crecimiento económico. En contraste, en los países en vías de desarrollo se destinan pocos recursos a la investigación y al desarrollo tecnológico, por ejemplo en México, el gasto destinado a dicho rubro tuvo un nivel muy bajo en 2005, tal y como se pone en evidencia a continuación:

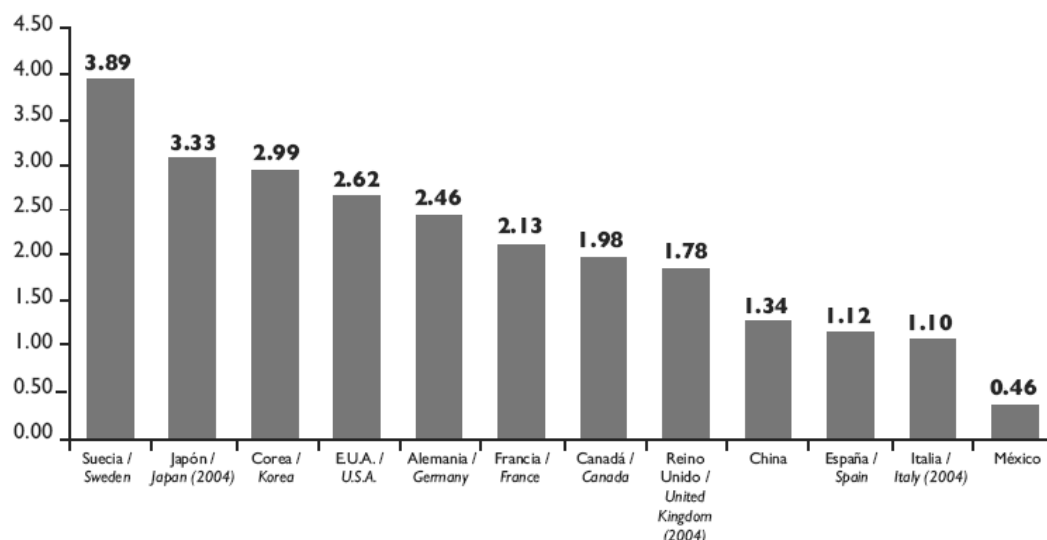
**Cuadro 2.** Gasto interno en investigación y desarrollo por país  
(millones de pesos corrientes)

<b>País</b>	<b>2005</b>
Alemania	62,493.2
Canadá	21,777.3
China	115,196.9
EU	324,464.5
España	13,263.8
Francia	4,0392
Italia	17,725.5
Japón	130,745.4
<b>México</b>	<b>5,145.5</b>
Reino Unido	35,171.1
Suecia	11,286.7

Fuente: INEGI-CONACYT Encuesta sobre Investigación y Desarrollo 2006, OECD Main Science and Technology Indicators 2007, CONACYT 2008.

Por su parte, países como China y Japón destinaron, en 2005, \$115,196.9 y \$130,745.4 millones de pesos, respectivamente, mientras que Estados Unidos destinó \$324.464 millones de pesos, esto último representa una diferencia abismal con respecto del gasto que en México se ejerció. La diferencia antes mencionada resulta más evidente cuando se analiza el gasto en investigación y desarrollo en términos del porcentaje del PIB (véase la Gráfica 1). Países como Suecia y Japón gastaron en el 2005 el 3.89% y el 3.33% de su PIB, respectivamente, en investigación y desarrollo, por su parte Corea destinó el 2.99% y Estados Unidos el 2.62%, inclusive China que se considera una economía emergente en el mismo año gastó el 1.34%, mientras que México solamente destinó el 0.46%.

**Gráfica 1.** Gasto interno en investigación y desarrollo por país como porcentaje del PIB en 2005



Fuente: INEGI-CONACYT Encuesta sobre Investigación y Desarrollo 2006, OECD Main Science and Technology Indicators 2007, CONACYT 2008.

Dentro de los pocos recursos que se canalizan a las actividades de investigación y desarrollo tecnológico en México, el gobierno aporta una mayor proporción del gasto interno para dicho rubro. En el Cuadro 2, el gasto se presenta por fuente de financiamiento en donde las principales fuentes son la productiva, el gobierno y el de la educación superior. Si se considera que, en México, la investigación al interior del sector educativo se da principalmente del lado público, entonces los recursos del sector gobierno y del sector educación superior tiene como origen el presupuesto federal, por lo tanto, el monto de financiamiento a la investigación y desarrollo por parte del gobierno es mayor en más del triple que el destinado por el sector productivo. Lo anterior puede verse como una acción del gobierno para compensar la investigación y el desarrollo tecnológico que deberían llevar a cabo las empresas. Esto, sin duda, resalta que la participación del gobierno en el cambio tecnológico en México es factor que debe estudiarse detenidamente.

**Cuadro 2.** Gasto interno en investigación y desarrollo por fuente de financiamiento. (Millones de pesos de 2006)

Sector de Ejecución	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Productivo	6,430	7,597	8,799	9,395	11,758	11,395	14,589	16,526
Gobierno	16,568	19,738	18,785	18,586	18,724	21,959	19,019	19,581
Educación Superior	2,190	3,130	1,780	2,851	2,893	2,713	2,813	2,903
No Lucrativo	31	35	170	247	294	277	295	371
Exterior	2,050	1,719	275	399	270	268	1,064	431
Total	27,269	32,219	29,809	31,478	33,939	36,611	37,779	39,813

Fuente: Encuesta sobre Investigación y Desarrollo Experimental 2000, INEGI-CONACYT Encuesta sobre Investigación y Desarrollo Tecnológico 2002, 2004 y 2006, INEGI, Sistemas de Cuentas Nacionales de México, SHCP, Cuenta de la Hacienda Pública Federal 1998 -2005, CONACYT 2008

Para comprobar que las actividades en investigación y desarrollo se realizan de manera más amplia en el sector público que en el privado, es suficiente ver la información del cuadro siguiente:

**Cuadro 3.** Gasto interno en investigación y desarrollo por sector de ejecución (millones de pesos de 2006)

Sector de Ejecución	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Productivo	7,683	8,229	8,869	9,537	11,526	11,230	16,118	18,692
Gobierno	10,031	14,498	12,435	12,293	8,484	10,381	9,790	9,226
Educación Superior	8,604	8,488	8,428	9,576	13,482	14,523	11,449	11,145
No Lucrativo	952	1,005	77	71	448	478	422	450
Total	27,269	32,219	29,809	31,478	33,939	36,611	37,779	39,813

Fuente: Encuesta sobre Investigación y Desarrollo Experimental 2000, INEGI-CONACYT Encuesta sobre Investigación y Desarrollo Tecnológico 2002, 2004 y 2006, INEGI, Sistemas de Cuentas Nacionales de México, SHCP, Cuenta de la Hacienda Pública Federal 1998 -2005, CONACYT 2008

En resumen, la participación del gobierno en las actividades en investigación y desarrollo tecnológico es muy importante, y puede permitir sentar las bases para un cambio en las condiciones de producción que permita incrementar la tasa de crecimiento económico de un país. Por lo que, el análisis del efecto que pueda o no tener el gobierno sobre la tasa de crecimiento a través de dichas actividades resulta pertinente.

Como ya se comentó anteriormente, en la teoría del crecimiento no se ha estudiado el papel del gobierno como agente generador del cambio tecnológico ni su efecto sobre el crecimiento. Hasta ahora el gobierno sólo se ha introducido al análisis del crecimiento para analizar el impacto que éste tiene sobre la capacidad productiva de la economía, véase Barro (1990), Futagami-Morita-Shibata (1993) y Cazzavillan (1996). Asimismo, el papel del gobierno se ha utilizado para verificar si los bienes públicos incrementan la productividad del capital privado como lo hace Gokan (2007). Por último, Huffman (2007), Turnovsky (2000 y 2004), Lucas y Stokey (1983) miden el impacto de la política económica sobre el crecimiento.

En esta investigación se desarrolla un modelo de crecimiento endógeno en donde los agentes determinan los posibles valores de sus parámetros de preferencias a través de un proceso de aprendizaje basado en el consumo previo. Específicamente, el individuo al consumir aprende sobre los parámetros de su función de utilidad y la información obtenida sobre dichos parámetros la representa en una distribución *a priori*. Por otro lado, el gobierno interviene como promotor de la generación de nuevas tecnología a través de su gasto. El presente trabajo caracteriza el equilibrio macroeconómico que es consistente con el proceso de aprendizaje sobre las preferencias de los agentes y establece el nivel del gasto de gobierno que maximiza el bienestar económico de los agentes cuando están sujetos a dicho proceso de aprendizaje. Asimismo, los impactos por cambios en el gasto, los impuestos y los precios en el bienestar económico son evaluados.



El trabajo se organiza de la siguiente manera; en la sección 2 se presenta la estructura de la economía. En el transcurso de la sección 3 se introduce la participación del gobierno en las actividades económicas a través la generación del cambio tecnológico. En la sección 4 se realiza un análisis del impacto sobre el bienestar de los hogares por shocks en el gasto, los impuestos y los precios. En la sección 5 se presentan las conclusiones y, por último, se incluyen al final dos apéndices con detalles matemáticos.

## **2. El modelo**

Considere una economía en donde los agentes económicos viven para siempre y tienen dotaciones y preferencias idénticas, y comparten una misma tecnología para producir un sólo bien de carácter perecedero. Por simplicidad suponga que dicha economía no sostiene relaciones de intercambio comercial con otras economías.

Con respecto al consumidor representativo, la teoría neoclásica usualmente postula que el individuo es racional y tiene información completa sobre los bienes que consume y la satisfacción que obtiene debido al consumo de dichos bienes. Esta información está contenida en su función de utilidad y los agentes desean obtener la máxima satisfacción posible sujetos a su restricción presupuestal. Suponga de manera adicional que el individuo conoce la forma funcional de dicha función de utilidad pero no así el valor de los parámetros de preferencia que aparecen en ella, por lo que a través de un proceso de aprendizaje basado en el consumo, el individuo le asigna una distribución *a priori* a estos parámetros. Específicamente, el individuo al consumir aprende sobre los parámetros de su función de utilidad y la información obtenida sobre

dichos parámetros la representa en términos de valores esperados. Posteriormente, el individuo obtiene una distribución *a priori* sobre los posibles valores de los parámetros a través de la maximización de una medida de información (la entropía). El procedimiento anterior se puede repetir tantas veces como sea necesario, hasta que el individuo tenga certeza sobre sus parámetros de preferencia. Resulta evidente que entre más rápido pueda determinar dichos valores, mayor será su utilidad en cada periodo. En consecuencia, la utilidad esperada del consumidor representativo, al tiempo  $t=0$ , está dada por:

$$V = \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} u(c; \delta) e^{-\rho t} dt \right\} \kappa(\delta) d\delta, \quad (1)$$

en donde  $c$  es el consumo *per capita*,  $\delta > 0$  es el parámetro que mide las preferencias del índice de utilidad,  $\kappa(\delta)$  es la distribución *a priori* que describe el conocimiento previo al tiempo  $t=0$  del parámetro  $\delta$ , y  $0 < \rho < 1$  es la tasa subjetiva de descuento que mide qué tan ansioso está un individuo por el consumo presente. Suponga que la función de utilidad es (exponencial negativa):

$$u(c; \delta) = -e^{-\delta c}. \quad (2)$$

Esta especificación del índice de utilidad presenta rendimientos marginales positivos, pero decrecientes, es decir,  $u'(c; \delta) > 0$  y  $u''(c; \delta) < 0$ . Por otra parte, se supone que la información adicional que el individuo obtenga sobre  $\delta$  a través del consumo previo a  $t=0$  se puede representar de la siguiente forma:

$$E[\delta] = \alpha^{-1}. \quad (3)$$

La distribución *a priori* que describe la información disponible en (3) es obtenida a través del principio de máxima entropía, es decir, como resultado de resolver:

$$\begin{aligned}
& \text{Maximizar} && - \int_0^{\infty} \kappa(\delta) \log \kappa(\delta) d\delta \\
& \text{s.a.} && \int_0^{\infty} \kappa(\delta) d\delta = 1, \\
& && \int_0^{\infty} \delta \kappa(\delta) d\delta = \alpha^{-1}.
\end{aligned} \tag{4}$$

La solución del problema anterior corresponde a la función de densidad exponencial con media  $\alpha^{-1}$ , como se muestra en el apéndice, es decir:

$$\kappa(\delta) = \alpha e^{-\alpha\delta}. \tag{5}$$

En consecuencia, la utilidad total descontada establecida en (1) se puede reescribir como:

$$V = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} -e^{-\delta c} \alpha e^{-\alpha\delta} e^{-\rho t} dt d\delta, \tag{6}$$

al resolver para  $\delta$  se tiene:

$$V = \int_0^{\infty} -\frac{\alpha}{(c + \alpha)} e^{-\rho t} dt. \tag{7}$$

Por otro lado, suponga que el agente representativo toma decisiones de consumo y producción de manera simultánea, es decir, el consumidor es dueño de la empresa en la cual se produce el bien de consumo. Suponga que todos los productores enfrentan las mismas condiciones representadas por la siguiente función del tipo de Harrod-Rebelo (Harrod 1939 y Rebelo 1991):

$$f(k) = Ak, \tag{8}$$

en donde  $A > 0$  es el producto marginal del capital y expresa el nivel tecnológico existente en la economía y  $k$  es el capital físico utilizado en el proceso de producción, es decir, el productor tiene como insumo al capital físico necesario para la producción del bien.

### 3. El gobierno promotor del cambio tecnológico

Para cerrar el modelo se incorpora el gobierno a las actividades económicas. Este agente económico realiza una actividad que consiste en la generación de tecnología. El sector público ejerce un gasto que destina hacia dependencias gubernamentales que tienen el objetivo de crear nuevas tecnologías, a través de la investigación y el desarrollo tecnológico. Esto significa que el gobierno crea de manera directa un cambio en las condiciones tecnológicas que, posteriormente, se transfiere al sector empresarial. En consecuencia, el gobierno modifica las condiciones de producción de la siguiente forma:

$$y = Ag^{\beta}k, \quad (9)$$

en donde  $g > 1$  es el gasto de gobierno destinado a la generación de nueva tecnología y  $\beta$  es el parámetro que mide el impacto del gasto público sobre el producto. La condición de que dicho gasto sea mayor a la unidad implica que éste debe alcanzar un nivel suficiente como para aumentar el nivel tecnológico existente, de tal forma que se cumpla con:

$$Ag^{\beta} > A. \quad (10)$$

Como el gobierno no realiza ninguna otra actividad económica, es decir, no produce, no consume, ni genera satisfacción a los consumidores, y como sus ingresos los obtiene a través de un impuesto sobre la renta, entonces la restricción presupuestal del gobierno toma la forma:

$$\tau y = g, \quad (11)$$

en donde  $\tau$  es el impuesto sobre la renta. Por lo tanto, al tomar en consideración (8), (9), y (11), la restricción presupuestal del consumidor representativo que posee a la empresa es:

$$k_0 = \int_0^{\infty} pc e^{-[Ag^{\beta}(1-\tau)]t} dt, \quad (12)$$

en donde  $p$  es el precio del bien de consumo. Bajo estas condiciones de producción, la tasa de interés de equilibrio es:

$$\frac{\partial y}{\partial k} = Ag^\beta (1 - \tau) = r. \quad (13)$$

En consecuencia, llevar a cabo el análisis en términos nominales, permitirá analizar, posteriormente, el efecto que tienen los precios bajo las condiciones ya establecidas. El problema de optimización determinado por (7), (12) y (13), produce las siguientes condiciones necesarias:

$$\frac{\alpha}{p(c + \alpha)^2} = \lambda, \quad (14)$$

$$\dot{k} = rk - pc, \quad (15)$$

$$r\lambda = -\dot{\lambda} + \rho\lambda, \quad (16)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{-rt} = 0. \quad (17)$$

En esta economía, el equilibrio macroeconómico está dado por:

$$c = \frac{\alpha k_0 (2\rho - r)}{p(rk_0 + \alpha)} e^{rt}, \quad (18)$$

$$k = \left[ k_0 + \frac{\alpha k_0 (r - 2\rho)}{p(rk_0 + \alpha)} \right] e^{rt} + \frac{\alpha k_0 (2\rho - r)}{p(rk_0 + \alpha)}, \quad (19)$$

$$y = Ag^\beta \left[ k_0 + \frac{\alpha k_0 (r - 2\rho)}{p(rk_0 + \alpha)} \right] e^{rt} + Ag^\beta \frac{\alpha k_0 (2\rho - r)}{p(rk_0 + \alpha)}, \quad (20)$$

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{c}}{c} \equiv \psi, \quad (21)$$

en donde  $\psi$  es a tasa de crecimiento económico balanceado en todos los sectores y, por lo tanto, de la economía. En el equilibrio, las trayectorias de consumo, capital y producto dependen, de manera positiva, del valor medio de la distribución que el

consumidor le asigna a su parámetro de preferencias a través de su proceso de aprendizaje sobre los posibles valores de sus parámetros de preferencias. Por otro lado, depende de manera inversa del nivel de precios y de la tasa subjetiva de descuento. Por su parte, una política fiscal encaminada hacia el aumento en el impuesto sobre la renta ocasiona una caída en el nivel de capital, en el producto y en la tasa de crecimiento. Respecto al gasto de gobierno, al tomar en cuenta la relación establecida en (13), se tiene que un mayor gasto destinado a la generación de tecnología incrementa los niveles de capital y producto, y aumenta la tasa de crecimiento económico. Dicho crecimiento tendrá lugar siempre que se cumpla con que  $Ag^\beta(1-\tau) > \rho$ , en caso contrario, la economía decrecerá.

En resumen, el impacto que tiene el gasto de gobierno destinado a la generación de nuevas tecnologías sobre el crecimiento económico es positivo. Análogamente, el proceso de aprendizaje por el cual pasa el consumidor tiene un efecto positivo sobre la actividad económica, toda vez que el consumo, el capital y el producto dependen de manera positiva del valor promedio que toma la distribución asignada a las preferencias por parte del consumidor. El impacto positivo de estas dos variables económicas quedará más claro con el siguiente análisis sobre el bienestar económico.

#### **4. Impacto sobre el bienestar**

Para poder realizar un análisis sobre el bienestar de los hogares, es necesario sustituir la trayectoria óptima del consumo dada por (18) y (21) en (7) para obtener la función que mide el nivel de utilidad de los individuos en el equilibrio, es decir el bienestar económico, por lo tanto:

$$W = \int_0^{\infty} -\alpha \left[ \frac{\alpha k_0 (2\rho - r)}{p(rk_0 + \alpha)} + \alpha \right]^{-1} e^{2(r-\rho)t} e^{-\rho t} dt . \quad (22)$$

Si se simplifica la ecuación anterior, se tiene:

$$W = \int_0^{\infty} - \left[ \frac{p(rk_0 + \alpha)}{k_0(2\rho - r)} + 1 \right] e^{(2r-3\rho)t} dt . \quad (23)$$

Cuando se resuelve (23), se obtiene (en el Apéndice 2 se muestra que el nivel óptimo de gasto para promover el cambio tecnológico es constante):

$$W = - \frac{p(rk_0 + \alpha)}{k_0(2\rho - r)(3\rho - 2r)} - \frac{1}{(3\rho - 2r)} . \quad (24)$$

Por lo tanto, el bienestar económico está en función, a través de la tasa de interés real, del nivel tecnológico de la economía, del gasto de gobierno destinado a la generación de tecnología y del impuesto sobre la renta del capital inicial. Asimismo depende de los precios, del valor medio de la distribución de las preferencias y de la tasa subjetiva de descuento. Al obtener la derivada parcial de (24) con respecto de  $r$  se obtiene:

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{2pr^2k_0^2 - 6pk_0^2\rho^2}{[k_0(2\rho - r)(3\rho - 2r)]^2} + \frac{1}{2r^2} > 0 . \quad (25)$$

Si se recuerda que  $0 < \rho < 1$  y  $r > 0$ , entonces se cumple que la ecuación (25) tiene signo positivo. Debido a que  $r = Ag^\beta(1-\tau)$ , un aumento en el gasto de gobierno destinado a la generación de tecnología o en el nivel tecnológico de la economía ocasionado por dicho gasto, aumentan la tasa de interés real. Este mismo efecto presenta una disminución del impuesto sobre la renta. En consecuencia, el bienestar económico de los hogares aumenta cuando la tasa de interés se eleva debido a incrementos en  $A$  y en  $g$  y a decrementos en  $\tau$ . Por otro lado, al derivar parcialmente  $W$  con respecto de  $\alpha$  se obtiene:

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = -\frac{p}{k_0(2\rho-r)(3\rho-2r)} < 0. \quad (26)$$

Variaciones en el valor medio de la distribución del parámetro de preferencias, generada por el proceso de aprendizaje del individuo, provoca caídas en el nivel de bienestar. Lo anterior comprueba que entre más rápido pueda determinar dichos valores mayor será su bienestar en cada periodo. Por último, la derivada parcial de  $W$  con respecto de  $p$  es:

$$\frac{\partial W}{\partial p} = -\frac{rk_0 + \alpha}{k_0(2\rho-r)(3\rho-2r)} < 0, \quad (27)$$

así, incrementos en el nivel de precios disminuyen el bienestar económico. Una vez que se ha identificado el impacto sobre el bienestar económico bajo las condiciones establecidas, es necesario determinar el nivel de gasto de gobierno que permite tener una mayor tasa de crecimiento económico en comparación a la tasa de crecimiento que tendría la economía en ausencia del gobierno en el cambio tecnológico.

## 5. Conclusiones

En el transcurso de esta investigación se mostró que, en un modelo de crecimiento endógeno en donde los individuos están sujetos a un proceso de aprendizaje por sus preferencias, la participación del gobierno en las actividades económicas a través de la generación del cambio tecnológico vía el gasto gubernamental, tiene efectos positivos en el nivel de consumo, capital y producto en términos *per capita*, así como sobre la tasa de crecimiento económico. Asimismo, en el equilibrio macroeconómico, las trayectorias de consumo, capital y producto dependen de manera positiva del valor medio de la distribución que el consumidor le asigna a su parámetro de preferencias a través de su proceso de aprendizaje. Por su parte, el consumo, el capital y el producto dependen inversamente del nivel de precios, por lo tanto, aumentos en los precios



disminuyen la actividad económica. Lo anterior puede ser compensado a través del gasto de gobierno ya que incrementos en los precios elevan el nivel de gasto necesario para maximizar el bienestar económico de los hogares, lo que se traduce en una mayor tasa de crecimiento; como se mostró en la sección 5.

El impacto sobre el bienestar económico de los hogares debido un aumento en el gasto gubernamental destinado a las actividades en investigación y desarrollo tecnológico es positivo, lo mismo sucede cuando se da una disminución en el impuesto sobre la renta aplicado a las empresas y recaudado por el gobierno. En contraparte, aumentos en el nivel de precios de los bienes de consumo tiene un impacto negativo sobre el bienestar económico. Por último, variaciones en el valor medio de la distribución del parámetro de preferencias, generada por el proceso de aprendizaje del individuo, provoca caídas en el nivel de bienestar. Por lo tanto, es deseable que entre más rápido pueda determinar el individuo dichos valores mayor será su utilidad en cada periodo.

De lo anterior se deduce que si las políticas gubernamentales están encaminadas a la generación de nueva tecnología, a través del gasto público, las economías emergentes como México podrán crecer a un mayor ritmo, lo que conduciría a aumentos en los niveles de calidad de vida.

Dentro de las principales limitaciones que caracterizan este tipo de análisis se pueden enlistar las siguientes: suponer que el gobierno sólo interviene en la generación de nueva tecnología es poco real, ya que existen muchas otras más actividades que realiza este agente económico, por lo tanto ampliar el papel del gobierno es necesario.

Además, suponer que la economía es cerrada elimina los posibles efectos que pueda tener el comercio internacional sobre el crecimiento. Finalmente, modelar las variables de manera determinista limita los efectos de las mismas, en específico mayor tratamiento se debe dar a la volatilidad inherente a la tasa de interés y a los precios. En consecuencia, futuros desarrollos teóricos deberán extender el análisis a una economía estocástica y abierta, incorporar otras variables financieras relevantes y establecer actividades económicas gubernamentales más amplias.

## Apéndice 1

En el transcurso de este apéndice se obtiene la ecuación (5). El problema de máxima entropía establecido en (4) se resuelve a través del uso del Lagrangeano:

$$L = -\kappa(\delta)\log[\kappa(\delta)] + \beta_1\kappa(\delta) + \beta_2\delta\kappa(\delta), \quad (\text{A.1})$$

en donde  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son los multiplicadores de Lagrange asociados a las restricciones. La condición de primer orden es:

$$\kappa(\delta) = e^{\beta_1 - 1 + \beta_2\delta}. \quad (\text{A.2})$$

Al sustituir (A.2) en la primera restricción de (4), se sigue que:

$$\int_0^\infty \kappa(\delta) d\delta = e^{\beta_1 - 1} \int_0^\infty e^{\beta_2\delta} d\delta = 1. \quad (\text{A.3})$$

Esta integral sólo es convergente cuando  $\beta_2 < 0$ , en cuyo caso se puede escribir  $\beta_2 = -\gamma$  con  $\gamma > 0$ , por lo tanto,  $\beta_1 = 1 + \log(\gamma)$ . En consecuencia se tiene que  $\kappa(\delta) = \alpha e^{-\gamma\delta}$  con  $\delta > 0$ . Al sustituir  $\kappa(\delta)$  en la segunda restricción de (4) se encuentra:

$$\alpha^{-1} = \int_0^\infty \delta \kappa(\delta) d\delta = \int_0^\infty \delta \gamma e^{-\gamma\delta} d\delta = \gamma^{-1}, \quad (\text{A.4})$$

de donde se sigue que  $\kappa(\delta) = \alpha e^{-\alpha\delta}$  con  $\alpha > 0$ .

A continuación se obtienen las ecuaciones (18)-(21). El problema de optimización resultante de (7), (12) y (13), y sus condiciones necesarias dadas por las ecuaciones (14)-(17), son el resultado del siguiente Hamiltoniano y sus condiciones de primer orden:

$$H = -\frac{\alpha}{c + \alpha} + \lambda [Ark - pc], \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial H}{\partial c} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial k} = \dot{k}, \quad -\frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{\lambda} - \lambda\rho. \quad (\text{A.2})$$

Al sustituir (14) y (16) en (15) y posteriormente resolver se encuentra el equilibrio macroeconómico dado por las ecuaciones (18)-(21).

## Apéndice 2

En este apéndice se muestra que el gasto óptimo del gobierno para impulsar el cambio tecnológico es constante. Con el fin de hacer más sencilla la tarea algebraica, se hacen algunas simplificaciones del problema original. Considere un consumidor racional que desea resolver:

$$\text{Maximizar } \int_0^{\infty} \ln(c_t) e^{-\rho t} dt$$

$$\text{sujeto a: } k_t = r_t k_t - (1 + \tau)c_t,$$

donde  $\tau$  es un impuesto *ad valorem* y el acervo inicial de capital,  $k_0$ , es dado. Observe que la restricción presupuestal se puede reescribir como:

$$k_0 = \int_0^{\infty} (1 + \tau)c_t e^{-\rho t} dt,$$

donde  $R_t = \int_0^t r_s ds$ . En este caso se debe cumplir la condición de transversalidad

$\lim_{t \rightarrow 0} k_t e^{-R_t} = 0$ . El Hamiltoniano está dado por  $H = \ln(c_t) + \lambda_t [r_t k_t - (1 + \tau)c_t]$ . Las

condiciones de primer orden conducen a

$$c_t = \frac{1}{\lambda_t (1 + \tau)} = \frac{\rho k_0}{(1 + \tau)} e^{AR_t - \rho t}.$$

Por otro lado, la empresa resuelve el problema (se supone  $\beta = 1$  a fin de simplificar el álgebra):

$$\text{Maximizar } \Pi_t = y_t - r_t k_t = Ag_t k_t - r_t k_t,$$

lo cual implica que  $Ag_t = r_t$ . En consecuencia, en el equilibrio, el consumo satisface

$$c_t = \frac{\rho k_0}{(1 + \tau)} e^{AG_t - \rho t},$$

donde  $G_t = \int_0^t g_s ds$ . Asimismo, la restricción presupuestal del gobierno es:

$$\dot{G}_t = g_t = \tau c_t = \frac{\rho k_0}{(1 + \tau)} e^{AG_t - \rho t}.$$

El problema de maximización de bienestar económico que el gobierno tiene que resolver consiste en encontrar  $G_t$  tal que:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } W &= \int_0^{\infty} [\ln(Q) + AG_t - \rho t] e^{-\rho t} dt \\ \text{sujeto a: } &0 = \dot{G}_t - B e^{AG_t - \rho t}. \end{aligned}$$

En este caso  $Q = (1 + \tau)^{-1} \rho k_0$  y  $B = \tau Q$ . Cuando se aplica la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial G_t} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{G}_t} \right) = 0$$

al Lagrangeano  $L = [\ln(M) + AG_t - \rho t] e^{-\rho t} + \mu_t (\dot{G}_t - B e^{AG_t - \rho t})$ , se obtiene la condición de un máximo:

$$A e^{-\rho t} - \mu_t A B e^{AG_t - \rho t} - \dot{\mu}_t = 0.$$

En este caso el multiplicador de Lagrange está dado por la expresión  $\mu_t = \mu_0 e^{-\rho t}$ , entonces  $\dot{\mu}_t = -\rho \mu_0 e^{-\rho t}$ , lo cual produce

$$Ae^{-\rho t} - \mu_0 AB e^{AG_t - 2\rho t} + \rho \mu_0 e^{-\rho t} = 0.$$

Por lo tanto,

$$e^{AG_t} = \left( \frac{A + \rho \mu_0}{\mu_0 AB} \right) e^{-\rho t}.$$

Esto implica que

$$G_t = \frac{\rho t}{A} + \ln \left( \frac{1}{\mu_0 B} + \frac{\rho}{AB} \right)^{\frac{1}{A}}.$$

Es decir,  $g_t = \dot{G}_t = \rho / A$ . Esto es,  $g_t$  es constante,  $g_t \equiv g_0$ .

## Referencias

- Aghion, P. y P. Howitt, “A Model of Growth through Creative Destruction”, *Econometrica*, 1992, Vol. 60, No. 2, pp. 323-351.
- Aghion, P. y P. Howitt, “Endogenous Technical Change: The Schumpeterian Perspective, Economic Growth and the Structure of Long-Term Development: Proceedings of the IEA Conference”, Varenna Italy, 1994, pp. 118-131.
- Arrow, K., “The Economic Implications of Learning by Doing”, *Review of Economic Studies*, 1962, Vol. 29, No. 3, pp. 155-173.
- Barro, R., “Government Expending in a Simple Model of Endogenous Growth”, *Journal of Political Economy*, Vol. 98, No. 5, 1990, pp. S103-S125.
- Cazzavillan, G., “Public Spending, Endogenous Growth and Endogenous Fluctuations”, *Journal of Economic Theory*, Vol. 71, 1996, pp. 394-415.
- Dosi, G., C. Freeman, S. Fabiani, R. Aversi, “The Diversity of Development Patterns: Catching up, Forging Ahead and Falling Behind, Economic Growth and the Structure of Long-Term Development: Proceedings of the IEA Conference”, Varenna Italy, 1994, pp. 132-167.
- Fagerberg, I., “Why Growth Rates Differ”, in Dosi *et al*, 1988.
- Futagami, Koichi, Morita, Yuichi, y Akihisa Shibata. 1993. “Dynamic Analysis of a Endogenous Growth Model with Public Capital”, *The Scandinavian Journal of Economics*, Vol. 95, No.4, pp. 607-625.

- Gokan, Y., “Infrastructure, Alternative Government Finance and Stochastic Endogenous Growth”, *Journal of economic Dynamics and Control*, 2007, doi:10.1016/j.jedc.2007.01.029.
- Harrod, R., “An Essay in Dynamic Theory”, *The Economic Journal*, 1939, Vol. 49, No. 193, pp. 14-33.
- Howitt, P., “Steady Endogenous Growth with Population and R&D Inputs Growing”, *The Journal of Political Economy*, 1999, Vol. 107, No. 4, pp. 715-730.
- Huffman, G., “Endogenous Growth through Investment-specific Technological Change”, *Review of Economic Dynamics*, No. 10, 2007, pp. 615–645.
- Jones, C., “R&D-Based Models of Economic Growth”, *The Journal of Political Economy*, 1995, Vol. 103, No. 4, pp. 759-784.
- Landesmann, M. y R. Goodwin, “Productivity Growth, Structural Change and Macroeconomic Stability, Economic Growth and the Structure of Long-Term Development: Proceedings of the IEA Conference”, Varenna Italy, 1994, pp. 205-240.
- Lucas, R., “On the Mechanics of Economic Development”, *Journal of Monetary Economics*, 1988, Vol. 22, pp. 3-42.
- Lucas, R. Jr., y Stokey N., “Optimal Fiscal and Monetary Policy in an Economy without Capital”, *Journal of Monetary Economics*, No. 12, 1983, pp. 55-93.
- Pavitt, K. y L. Soete, “International Differences in Economic Growth and the International Location of Innovation, Emerging Technologies: Consequences for Economic Growth, Structural Change and Employment”, 1981.
- Rebelo, S., “Long Run Policy Analysis and Long Run Growth”, en *The Journal of Political Economy*, Vol. 99, No. 3, junio de 1991, pp. 500 – 521.
- Romer, P., “Increasing Returns and Long-Run Growth”, *The Journal of Political Economy*, 1986, Vol. 94, No. 5, pp. 1002-1037.
- Romer, P., “Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization”, *The American Economic Review*, 1987, Vol. 77, No. 2, Papers and Proceedings of the Ninety-Ninth Annual Meeting of the American Economic Association, pp. 56-62.
- Romer, P., “Endogenous Technological Change”, *The Journal of Political Economy*, 1990a, Vol. 98, No. 5, Part 2: The Problem of Development: A Conference of the Institute for the Study of Free Enterprise System, pp. S71-S102.
- Turnovsky, S., “Fiscal Policy, Elastic Labor Supply, and Endogenous Growth”, *Journal of Monetary Economics*, No. 45, 2000, pp. 185-210.

Turnovsky, S., “The Transitional Dynamics of Fiscal Policy: Long-Run Capital Accumulation and Growth” *Journal of Money, Credit, and Banking*, Vol. 36, No. 5, October 2004, pp 1-30.

Uzawa, H., “Optimum Technical Change in an Aggregative Model of Endogenous Growth”, *International Economic Review*, 1965, Vol. 6, No.1, pp. 18-31.